

Cours 5: EDO linéaires

On considère un système linéaire de la forme

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),$$

$\vdots$

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),$$

i.e.

(NH)

$$x' = A(t)x + f(t),$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Si $f(t) \neq 0$, le système est dit non-homogène
Si $f(t) \equiv 0$, on a le système homogène

(H)

$$x' = A(t)x.$$

Notation: (i) Pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on définit la norme matricielle $|A| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on notera encore $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

On a alors les propriétés suivantes:

(a) $|A| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad |A| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

(b) $|kA| = |k| |A| \quad \forall k \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

(c) $|A+B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq |A| |B| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

(d) $|Ax| \leq |A| |x| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n.$

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}_0$. Pour une fonction à valeur matricielle $t \mapsto A(t)$, on dira que $A \in C^k(a, b), \mathbb{R}^{n \times n}$ si $a_{ij} \in C^k(a, b), \mathbb{R}$ pour $i, j = 1, \dots, n$. On notera les dérivées de $A(t)$ par $A^{(l)}(t) = (a_{ij}^{(l)}(t))_{i,j=1}^n$, $l = 1, \dots, k$.

La théorie des systèmes linéaires commence par le résultat suivant, d'existence et unicité, pour les solutions de (NH).

Théorème 5.1: Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et supposons que $A \in C^0(a, b), \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in C^0(a, b), \mathbb{R}^n$.

Soit $t_0 \in (a, b)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy

$$(PCL) \quad x' = Ax + f, \quad x(t_0) = x_0,$$

possède une unique solution, qui existe sur tout (a, b) .

Preuve: Posons $D = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ et $\tilde{f}(t, x) = A(t)x + f(t)$.

Par hypothèse, $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ et sans fait

$D_x \tilde{f}(t, x) \equiv A(t)$. Ainsi, $D_x \tilde{f} \in C^0(D, \mathbb{R}^{n \times n})$ et $\tilde{f}$ est loc. lip. en x sur D . Par le thm 2-1, (PCL)

possède une unique solution locale, au voisinage de t_0 .

La globalité de la solution sera démontré un exercice.

#

Théorie générale des systèmes linéaires homogènes

On considère dans ce qui suit l'équation vectorielle (H) avec $A \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{n \times n})$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Proposition 5.1 :

(a) (solution triviale) $x(t) \equiv 0$, $t \in (a, b)$ est solution de (H), pour toute condition initiale (CI) de la forme $x(t_0) = 0$, $t_0 \in (a, b)$. Nous appelons cette solution la solution triviale (ou solution nulle).

(b) (principe de superposition) Soit $x_1(t)$, $x_2(t)$ deux solutions de (H) sur (a, b) . Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ est solution de (H) sur (a, b) .

Remarque 5.1 : (i) Notez que (a) découle de (b).

(ii) Le point (b) indique que les solutions de (H) forment un espace vectoriel.

Définition 5.1 : Soit $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que les fonctions $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont linéairement dépendantes sur (a, b) s'il existe $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ des constantes non toutes nulles telles que

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_m x_m(t) \equiv 0 \quad \text{sur } (a, b).$$

Sinon, on dit que $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont linéairement indépendantes sur (a, b) .

Définition 5.2 : Soit $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On définit le wronskien (ou déterminant de Wronski)

de $x_1, \dots, x_n$ par

$$W(t) = W[x_1, \dots, x_n] := \det(x_1(t) \dots x_n(t)).$$

Lemme 5.1 : Soit $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont lin. dép. sur (a, b) , alors leur wronskien satisfait $W(t) \equiv 0$ sur (a, b) .

Preuve : Par hypothèse, il existe des constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ non toutes nulles telles que
$$(x_1(t) \dots x_n(t)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(5.1) \quad c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \equiv 0 \quad \text{sur } (a, b).$$

Pour tout $t \in (a, b)$ fixé, (5.1) vu comme un système linéaire homogène d'équations pour les inconnues $c_1, \dots, c_n$ possède une solution non-triviale. Ceci implique que le déterminant associé au système soit nul, d'où le résultat. $\#$

Remarque 5.2 : La réciproque du lemme 5.1 est fausse : $W(t) \equiv 0$ sur (a, b) ne garantit pas que $x_1, \dots, x_n$ soient lin. indép. sur (a, b) . Un contre-exemple avec $n=2$ est donné par $x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

$W(t) \equiv 0$ garantit seulement $\forall t \exists c_1(t), \dots, c_n(t)$ non toutes nulles t.q. $c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t) = 0$.

En revanche, si les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont solutions de (H), on a le résultat suivant.

Lemma 5.2 : Soit $x_1, \dots, x_n$ des solutions de (H) sur un intervalle (a, b) . Alors $x_1, \dots, x_n$ sont lin. indép. si et seulement si $W(t) \neq 0$, pour tout $t \in (a, b)$.

Preuve: $W(t) \neq 0 \quad \forall t \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ lin. indép. est donné par le lemme 5.1. On prouve la réciproque par contraposition. Soit $t_0 \in (a, b)$ tel que $W(t_0) = 0$. Considérons alors le système linéaire

$$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) = 0$$

pour les inconnues $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$. Puisque son déterminant est nul, il possède une solution non-triviale $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$. Soit $x(t) = \tilde{C}_1 x_1(t) + \dots + \tilde{C}_n x_n(t)$, $t \in (a, b)$. Par le principe de superposition, $x(t)$ est solution de (H). De plus, $x(t_0) = 0$. Par unicité, on conclut que $x(t) \equiv 0$ sur (a, b) . Ainsi

$$\tilde{C}_1 x_1(t) + \tilde{C}_2 x_2(t) + \dots + \tilde{C}_n x_n(t) \equiv 0 \quad \text{sur } (a, b),$$

donc $x_1, \dots, x_n$ sont lin. dép. sur (a, b) . $\#$

Les lemmes 5-1 et 5-2 impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 5.1 : Soit $x_1, \dots, x_n$ solutions de (H) sur (a, b) . Alors leur wronskien $W(t)$ satisfait :
soit $W(t) \equiv 0$ sur (a, b) ; soit $W(t) \neq 0$ sur (a, b) .

De plus :

$W(t) \equiv 0$ sur $(a, b) \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ lin. dép. sur (a, b) ;

$W(t) \neq 0$ sur $(a, b) \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ lin. indép. sur (a, b) .

Remarque 5.3 : Le corollaire 5.1 montre que le wronskien $W(t)$ de n solutions de (H) satisfait

$$W(t) \equiv 0 \text{ sur } (a,b) \Leftrightarrow \exists t_0 \in (a,b) \text{ t.q. } W(t_0) = 0$$

$$W(t) \neq 0 \text{ sur } (a,b) \Leftrightarrow \exists t_0 \in (a,b) \text{ t.q. } W(t_0) \neq 0$$

Ainsi la dépendance ou l'indépendance linéaire de n solutions de (H) peut être déterminée en évaluant le wronskien en un point de (a,b) .

Théorème 5.2 : Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et $A \in C^0((a,b), \mathbb{R}^{n \times n})$.

Alors l'ensemble des solutions de (H) forme un espace vectoriel de dimension n .

Preuve : La preuve se fait en deux étapes.

Étape 1 : (H) possède (au moins) n solutions lin. indép.

En effet, soit $x_1(t), \dots, x_n(t)$ les solutions données par le théorème 5.1 pour le pb. de Cauchy (H) avec respectivement les CI

$$x_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad x_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $t_0 \in (a, b)$ est quelconque. Alors le wronskien $W(t)$ des solutions $x_1, \dots, x_n$ satisfait

$$\forall t \in (a, b), \quad W(t) \equiv W(t_0) = \det I_n = 1 \neq 0.$$

Donc les solutions $x_1, \dots, x_n$ sont lin. indép. par le corollaire 5.1.

Étape 2: (H) possède au plus n sols. lin. indép.

En effet, soit $x_1, \dots, x_n$ des sols. lin. indép. de (H) et soit $x = x(t)$ une solution de (H). Nous allons montrer qu'il existe $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ (uniques) t.q.

$$x(t) \equiv C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) \text{ sur } (a, b).$$

Pour $t_0 \in (a, b)$ fixé, $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, le vecteur $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x(t_0) = C_1 x_1(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0)$$

pour un unique choix de constantes $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

D'autre part, en vertu du principe de superposition,

$$y(t) := C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

est solution de (H) sur (a, b) , et satisfait

la CI $y(t_0) = x(t_0)$. Alors, par unicité de la solution du problème de Cauchy (thm 5.1), $x(t) \equiv y(t)$. #

Définition 5.3 : (a) Une fonction matricielle $X(t) = (x_1 \dots x_n)(t)$ est appelée solution matricielle de (H) si ses vecteurs colonne $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sont des solutions de (H) .

(b) Une solution matricielle $X(t)$ est une matrice fondamentale de (H) si ses colonnes sont lin. indép.

(c) Une matrice fondamentale $X(t)$ de (H) est appelée matrice principale de (H) à $t = t_0 \in (a, b)$ si $X(t_0) = I_n$.

Les résultats suivants seront démontrés en exercices.

Proposition 5.2 : Soit $A \in C^0(a, b), \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) $X(t)$ est une solution matricielle de (H) ssi
$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \forall t \in (a, b).$$

(b) $X(t)$ est une matrice fondamentale de (H)
ssi $X'(t) = A(t)X(t)$ et $\det X(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$.

(c) Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (H).
Alors $x(t)$ est solution de (H) ssi

$$\exists c \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } x(t) = X(t)c, \quad \forall t \in (a, b).$$

Explicitement, c est déterminé par $c = X^{-1}(t_0)x(t_0)$.

(d) Il existe une unique matrice principale de (H) à $t = t_0$.

Nous terminons avec le théorème suivant, qui complète la discussion ci-dessus sur le wronskien, et sera également démontré en exercice.

Théorème 5-3 (Liouville)

Soit $A \in C^0(a, b, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Soit $X(t)$ une solution matricielle de (H) et soit $W(t) = \det X(t)$. Alors

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t) W(t), \quad \forall t \in (a, b).$$

Par conséquent,

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}, \quad \forall t_0, t \in (a, b).$$